

# Церковные календари и пасхалия (математический подход)

*Нестеренко Ю.В.*

## 1 Вступление.

Календарь есть средство для организации нашей жизни во времени. Христианские календари: юлианский, григорианский и новоюлианский, упорядочивают и связывают в пространстве и во времени все многообразие церковной жизни. Где бы ни находились мы сами и наши единоверцы, мы отмечаем праздники или соблюдаем посты в одно и то же время. Календарь служит символом единения, ощущения общности. Календарь это — история церкви и ее будущее.

Календари — не очень сложные математические конструкции, устоявшиеся в течение столетий и тысячелетий, сами стали традицией церкви и каждое самое незначительное изменение в них неминуемо ломает сложившиеся привычки, отражается на жизни миллионов верующих, может привести к несогласию и тяжелым последствиям.

В то же время нельзя не заметить ряд проблем, как правило, возникающих при совместном использовании различных календарей или сравнении календаря с астрономической реальностью.

**Проблемы.** С 1918 года в России введен григорианский календарь, и в настоящее время он практически повсеместно используется в обыденной жизни. За прошедшее с тех пор время и в последующий до 2100г. период високосные годы, исчисляемые по юлианскому и григорианскому календарям совпадают. Мы привыкли к тому, что из года в год празднуем Рождество Христово 7 января, а Благовещение 7 апреля по новому стилю. Но, после февраля 2100 года неподвижные праздники, оставаясь неподвижными по юлианскому календарю, впервые для нашей церкви сдвинутся в григорианском календаре на один день. Благовещение в 2100 году будет праздноваться 8 апреля, а Рождество в 2101 году придется на 8 января.

Православные церкви Александрии и Антиохии, Греции, Кипра и Румынии, Польши и Болгарии, ряд других церквей, перешедших в 1923г. на новоюлианский календарь, для определения даты празднования Пасхи пользуются юлианской пасхалией. При этом сроки подвижных событий, вычисленные по юлианской пасхалии и автоматически перенесенные на новоюлианский стиль, зачастую входят в противоречие с неподвижными праздниками, определенными по этому стилю. Наиболее яркий пример — Петров пост. Начало его приходится на седьмой день после Троицы и потому не имеет фиксированной даты, завершается же он накануне праздника Петра и Павла, т.е. 28 июня. Разница между датами юлианского и новоюлианского календарей составляет в настоящее время 13 суток и с течением времени будет увеличиваться. В результате Пасха, а вместе с ней и начало Петрова поста будут смещаться к летним датам новоюлианского календаря. Сначала Петров пост уменьшится, а затем и вовсе исчезнет.

Как известно, юлианское весеннее равноденствие, благодаря неточности приближения астрономического года календарным, смещается к лету и, если ничего не менять, нашей церкви придется праздновать Пасху во время зимы в Иерусалиме, а затем и перед иудейской Пасхой.

Впервые идея реформирования юлианского календаря в России официально рассматривалась, по-видимому, в 1829-1830 годах специальным Комитетом при Российской Академии наук, высказавшимся тогда за переход на григорианский календарь. Впоследствии рассматривались и другие варианты. В настоящее время можно утверждать, что григорианский календарь — не лучшая из возможных замен юлианского календаря.

Юлианский и григорианский календари имеют принципиально различные системы распределения лунных месяцев. Юлианский календарь старается приблизить по возможности точнее начала **всех** астрономических лунных месяцев. Григорианский же, прямым вычислением находит очередное январское новолуние и таким способом следит за тем, чтобы январские, а, значит, и мартовские новолуния и полнолуния были по возможности ближе к астрономическим. Именно мартовские полнолуния связаны с вычислением Пасхи. Нельзя сказать, что календарные события, происходящие в конце лунных годов, не заботили создателей григорианского календаря. В пределах возможного они пытались скорректировать распределения новолуний, чтобы избежать нежелательных эффектов. Но период календаря 5700000 лет очень велик, а функция, вычисляющая январские новолуния, достаточно сложна. Вручную проверить все последствия принятой конструкции можно было лишь на несколько тысяч лет вперед. Сейчас, пользуясь компьютером, можно легко просмотреть весь период и обнаружить некоторые несоответствия с астрономическими событиями. Например, в григорианском календаре возможны лунные месяцы продолжительностью как в 59 дней, так и в 1 день. Конечно, все это происходит в конце лунных годов и не отражается на пасхалии, но факт, что григорианский календарь иногда теряет новолуния, а иногда вставляет лишние новолуния там, где их не должно быть.

**О докладе.** В докладе будет представлено описание трех христианских календарей с единой точки зрения. Пользуясь принципами, лежащими в основе юлианского календаря, можно построить несколько календарей, имеющих не уступающие, а в чем то и лучшие характеристики по сравнению с григорианским. Например, сохранив принятую в григорианском календаре систему счета годов, можно изменить его распределение месяцев. Период календаря при этом уменьшится до 6400 лет. Существует календарь с периодом в 372 года (вместо 532 у юлианского календаря), по точности распределения годов превосходящий григорианский календарь. В конце доклада мы описываем возможную лунную составляющую к новоюлианскому календарю, обеспечивающую высокую точность и сравнительно небольшой период.

**Астрономия и точность.** Исторически сложившиеся единицы измерения больших промежутков времени: *год, месяц, день или сутки*, связаны с периодически повторяющимися астрономическими событиями. По ряду причин эти основные временные отрезки не постоянны, но меняются, очень медленно и неравномерно. Земля замедляет вращение вокруг своей оси, Луна удаляется и период ее обращения вокруг Земли увеличивается, продолжительность обращения Земли вокруг Солнца также меняется. Существующие теории, описывающие эти изменения, рассчитаны на несколько тысячелетий и не могут дать достоверные результаты на промежутках, отстоящих достаточно далеко от нашего времени.

Вместе с тем, календарь, будучи принятым, теряет всякую связь с астрономией, и функционирует, как независимая и незыблемая математическая конструкция. Григорианский календарь, созданный более 400 лет тому назад, за прошедшее время не изменился. Юлианский календарь остается неизменным еще больший промежуток времени. Точность календаря во многом определяется точностью астрономических измерений и выбором рациональных приближений к возникающим в результате этих измерений средним величи-

нам.

Для оценки точности календарей мы, следуя традиции, принимаем простую модель, в которой Земля и Луна равномерно вращаются по своим круговым орбитам, а сама Земля с неизменной скоростью вращается вокруг своей оси, сохраняющей фиксированное направление в пространстве. Поэтому сравнивая точность календарей, особенно на больших промежутках времени, нужно иметь в виду условность такого сравнения.

Выраженные в сутках, средний солнечный год  $\alpha$  (так называемый тропический год), и средний лунный месяц  $\beta$  (синодический месяц) несоизмеримы

$$\alpha = 365,242198 \dots \text{ суток} \quad \beta = 29,530588 \dots \text{ суток.}$$

Имеется в виду, что между этими числами не существует соотношений со сравнительно небольшими целыми коэффициентами, а сами они не могут быть хорошо приближены рациональным числам с небольшими числителями и знаменателями. Это свойство подтверждается непосредственной проверкой, например, при помощи компьютера. С несоизмеримостью связаны трудности устройства календарей.

## 2 Календари.

Единицы измерения времени в календарях носят названия календарный год, лунный год, лунный месяц, день (сутки). Течение времени в календарях есть последовательность дней, по разному представляемая в виде последовательностей годов, календарных и лунных, а также последовательности лунных месяцев. Каждый календарный год и каждый лунный месяц содержат целое число дней. Календарные и лунные годы, как и лунные месяцы могут иметь различную продолжительность. Каждый лунный год состоит из нескольких лунных месяцев. Первый день каждого лунного месяца называется *новолунием*.

Рассмотрим некоторые примеры.

**Египетский календарь.** В 4-м тысячелетии до РХ в древнем Египте сложился календарь с длиной календарного года в  $a = 365$  дней. За один год календарь отставал примерно на  $\alpha - a = 0,242198$  суток. За четыре года отставание уже равнялось  $4(\alpha - a) = 0,242198 \cdot 4 = 0,968792$  дней, т.е. примерно сутки. На следующей картинке, где масштаб, конечно, не выдержан, схематически представлено это отставание.

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & a & 2a & 3a & 4a & 5a & 6a & \\ \hline & \alpha & 2\alpha & 3\alpha & 4\alpha & 5\alpha & & \end{array}$$

Так как каждые 4 года отставание календаря составляло примерно одни сутки, то начало календарного года, пройдя последовательно через все сезоны, по истечении примерно  $4 \cdot 365\frac{1}{4} = 1461$  лет, возвращалось к исходному состоянию. Идея корректировать календарь, добавляя в каждый четвертый год один лишний день, зародилась в Египте и была известна по крайней мере за 200 лет до РХ.

Календарь, называемый юлианским, и основанный на этой идее был предложен александрийскими астрономами во главе с Созигеном и введен во всей Римской империи в 46г. до РХ указом Юлия Цезаря.

**Юлианский календарь.** Календарные годы юлианского календаря состоят из 365 или из 366 дней. Причем год содержит 365 дней, если его номер не делится на 4 (обыкновенный год), и 366 дней, если его номер делится на 4 (високосный год)<sup>1</sup>. Другими словами в юлианском календаре длительность  $f(n)$  календарного года с номером  $n$  принимается равной <sup>2</sup>  $f(n) = 365 + \delta_4(n)$ . Отклонение начал календарных годов от астрономических равно<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} n\alpha - \sum_{k=1}^n (365 + \delta_4(k)) &= n\alpha - 365n - \left[ \frac{n}{4} \right] = \\ &= (\alpha - 365\frac{1}{4})n + \left\{ \frac{n}{4} \right\} = -0,0078 \dots \cdot n + \left\{ \frac{n}{4} \right\}. \end{aligned}$$

Отклонение состоит из медленно меняющейся монотонной составляющей  $-0,0078 \cdot n$  и периодической составляющей  $\left\{ \frac{n}{4} \right\}$ . По прошествии большого числа лет основной вклад в отклонение дает его монотонная составляющая.

Спустя 128 лет отклонение составит  $0,0078 \cdot 128 = 0,9984$  суток. Таким образом, 128 лет юлианского календаря содержат на один день больше, чем 128 солнечных лет. В этом состоит основная причина смещения юлианского календаря относительно астрономических событий, приведшая к отставанию в настоящее время на 13 дней событий юлианского календаря от аналогичных событий григорианского или новоюлианского календарей.

**Поправка Медлера.** В 1864г. И.Медлер<sup>4</sup> предложил вычитать 1 лишний день каждые 128 лет, начиная с 1900 года. Так как  $1920 = 15 \cdot 128$ , то продолжительность года в календаре Медлера есть

$$f(n) = 365 + \delta_4(n) - \delta_{128}(n + 20).$$

Средняя продолжительность календарного года Медлера равна  $365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{128} = 365\frac{31}{128}$  суток, а среднее отклонение за год составляет  $\alpha - 365\frac{31}{128} = 0,00001 \dots$  суток. Значит, только через 80000 лет календарь Медлера станет назначать начало нового календарного года на 1 день раньше срока.

В 1900 году комиссия Русского астрономического общества по вопросу о реформе календаря рекомендовала введение в России календаря на основе поправки Медлера, но проект не был принят. В работе комиссии участвовали Д.И. Менделеев (голосовал за проект) и В.В. Болотов (голосовал против).

**Иудейский календарь.** После того, как армия Тита разгромила в 70г. по РХ Иерусалим, и большинство жителей Иудеи были рассеяны по Римской империи, перед властями Иудеи возникла проблема сохранения системы религиозных праздников и одновременного исполнения религиозных обрядов в удаленных римских провинциях. Для сохранения единства нации иудейский патриарх Хиллель II в 358/359 годах по Р.Х. ввел новый календарь, не использующий астрономические наблюдения. Этот календарь и сейчас является официальным календарем государства Израиль.

<sup>1</sup>Мы ведем нумерацию годов от Рождества Христова. Летоисчисление было предложено Дионисием Малым, составившим в 525 по этому исчислению году таблицы дат Пасхи на период с 532 по 626 годы.

<sup>2</sup>В этой формуле  $\delta_4(n)$  есть функция, определенная на целых числах  $n$ , равная 1, если  $n$  делится на 4 и 0, если  $n$  не делится на 4. В дальнейшем будут использоваться и более общие функции  $\delta_q(n)$ , определяемые при любом натуральном  $q$  аналогично.

<sup>3</sup>Следующие далее вычисления используют две функции  $\{x\}$  – дробная часть числа  $x$  и  $[x]$  – целая часть числа  $x$ . Последняя равна наибольшему целому числу  $n$  с условием  $n \leq x$ , а дробная часть по определению есть  $x - [x]$ . Например,  $[2\frac{3}{4}] = 2$ ,  $\{2\frac{3}{4}\} = \frac{3}{4}$ .

<sup>4</sup>Профессор Университета в Дерпте (Тарту).

Иудейский вычисляемый календарь включает в себя только лунные годы и лунные месяцы. Понятие календарный год в нем отсутствует. В основе лежат приближения

$$\beta - \frac{765433}{25920} = -0,000006\dots, \quad \frac{\alpha}{\beta} - \frac{235}{19} = -0,000154\dots$$

Последовательность лунных месяцев разбивается на отрезки длиной в 12 или 13 месяцев (лунные годы) по правилу

$$12, 12, 13, 12, 12, 13, 12, 13, 12, 12, 13, 12, 12, 13, 12, 12, 13, 12, 13, \dots$$

Далее эта последовательность начинает повторяться. Ее период длиной в 19 лет, содержит 7 лет по 13 месяцев и 12 лет по 12 месяцев (Метонов цикл). Не трудно проверить, что первые  $n$  лунных лет иудейского календаря состоят из

$$12n + \left[ \frac{7n + 1}{19} \right]$$

месяцев. Начало  $M$  лунного года с номером  $n + 1$ ,  $n \geq 0$ , вычисляется по правилу:

$$M = 1 + \left[ \frac{1}{4} + \frac{467}{2160} + \left( 12n + \left[ \frac{7n + 1}{19} \right] \right) \cdot \frac{765433}{25920} \right].$$

Затем оно может быть сдвинуто на 1 или 2 дня вперед с тем, чтобы по религиозным соображениям начало нового лунного года не выпало на среду, пятницу или воскресенье, а с другой стороны чтобы длина каждого лунного года равнялась одному из чисел 353, 354, 355 (год в 12 месяцев) или 383, 384, 385 (год в 13 месяцев).

Лунные месяцы состоят из 29 или 30 дней, их продолжительности выбираются так, чтобы обеспечить нужную длину года. Отклонение начал лунных годов от соответствующих астрономических может достигать 25 дней. Иудейский календарь не предназначен для точного следования солнечным годам.

Впоследствии прямое вычисление январского новолуния очередного лунного года появилось в григорианском календаре.

### 3 Церковный юлианский календарь.

В 325г. по РХ в г. Никее по инициативе римского императора Константина Великого прошел первый в истории христианства Вселенский Собор. На Никейском соборе определились и установились основные доктрины христианства. Подлинный текст определений Собора до нас не дошел, и о решениях относительно празднования Пасхи мы знаем по упоминаниям их в других документах. В послании императора Константина к епископам, не присутствовавшим на Соборе, в частности, говорится

"Общим мнением признано за благо — всем христианам, в какой бы стране они ни жили, совершать спасительный праздник святейшей Пасхи в один и тот же день ..."

Большая удаленность христианских общин друг от друга и отсутствие быстрой связи не позволяли, например, жителям Рима своевременно определить момент наступления весеннего равноденствия в Византии и наоборот. Следствием принятого в Никее решения

об одновременном праздновании Пасхи стал отказ от астрономических наблюдений и переход к **вычислению** дня празднования Пасхи по определенным формальным правилам, одинаковым для всех христиан, где бы они ни находились.

Сложный процесс формирования таких правил происходил в течение нескольких столетий и, вероятно, важную роль в нем сыграл авторитет александрийской научной школы.

**Формула:** *Пасха празднуется в первый воскресный день после первого полнолуния, следующего не ранее весеннего равноденствия.*

1. Днем весеннего равноденствия считается 21 марта.
2. Полнолуние наступает на 14 день лунного месяца.
3. Дни весеннего равноденствия и последовательность новолуний вычисляются по правилам церковного юлианского календаря.

Первое полнолуние, следующее за 21 марта, считается формальным аналогом иудейской Пасхи (14 нисана) и называется пасхальным пределом или иудейской Пасхой. В этом смысле пасхальное правило "воскресенье после первого полнолуния" аналогично правилу, предписывающему праздновать христианскую Пасху после иудейской.

Условие о том, что полнолуние должно быть не ранее весеннего равноденствия, исключает празднование Пасхи дважды в пределах одного календарного года. Как уже говорилось, иудейский календарь плохо приближает солнечные годы, поэтому в одном солнечном году 14 нисана может появиться дважды.

**Церковный юлианский календарь** включает в себя не только исчисление годов, принятое в юлианском календаре, но и исчисление лунных месяцев, необходимое для определения пасхального полнолуния. Он основан на следующих приближениях к длительностям тропического года и синодического месяца

$$\alpha - 365\frac{1}{4} = \alpha - \frac{27759}{76} = -0,007802, \quad \beta - \frac{27759}{940} = -0,000263$$

Этим приближениям соответствует так называемое уравнение Калиппа: *В каждые 76 подряд идущих календарных годах юлианского календаря содержится 27759 дней. Каждые 76 подряд идущие лунные года содержат 940 лунных месяцев и состоят из 27759 дней.*

О распределении календарных годов было сказано выше. Распределение новолуний юлианского календаря можно описать следующими правилами.

- Первое новолуние года, предшествовавшего 1 году после Р.Х., выпало на 23 января.
- Лунные годы состоят последовательно из

12, 12, 13, 12, 12, 13, 12, 13, 12, 12, 13, 12, 12, 13, 12, 12, 13, 12, 13

лунных месяцев. Далее эти числа повторяются, образуя периодическую последовательность с периодом 19.

- Первый месяц каждого лунного года состоит из 30 дней. Далее продолжительности месяцев чередуются, т.е. состоят из 29, 30, 29 и т.д. дней.
- Если номер лунного года делится на 4, то ко второму месяцу нужно прибавить один

день.

• Если номер лунного года, увеличенный на 1, делится на 19, из последнего месяца лунного года нужно отнять один день.

Ясно, что эти правила однозначно определяют распределение лунных месяцев. Например, в году, предшествовавшем первому году после Р.Х., новолуния приходятся на следующие даты

23.01, 22.02, 23.03, 22.04, 21.05, 20.06, 19.07, 18.08, 16.09, 16.10, 14.11, 14.12

Новолуние, следующее за последним в указанном списке, ( $14+29 = 43$  декабря = 12 января), является началом нового лунного года. Продолжая эти вычисления можно получить следующую таблицу, содержащую даты новолуний юлианского календаря. Первый столбец этой таблицы содержит номера годов после Р.Х.. При этом год, предшествующий первому году имеет номер 0.

О	30	29/30	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29	30/29
0	23.01	22.02	23.03	22.04	21.05	20.06	19.07	18.08	16.09	16.10	14.11	14.12	-
1	12.01	11.02	12.03	11.04	10.05	9.06	8.07	7.08	5.09	5.10	3.11	3.12	-
2	1.01	31.01	1.03	31.03	29.04	29.05	27.06	27.07	25.08	24.09	23.10	22.11	21.12
3	20.01	19.02	20.03	19.04	18.05	17.06	16.07	15.08	13.09	13.10	11.11	11.12	-
4	9.01	8.02	9.03	8.04	7.05	6.06	5.07	4.08	2.09	2.10	31.10	30.11	-
5	29.12	28.01	26.02	28.03	26.04	26.05	24.06	24.07	22.08	21.09	20.10	19.11	18.12
6	17.01	16.02	17.03	16.04	15.05	14.06	13.07	12.08	10.09	10.10	8.11	8.12	-
7	6.01	5.02	6.03	5.04	4.05	3.06	2.07	1.08	30.08	29.09	28.10	27.11	26.12
8	25.01	24.02	25.03	24.04	23.05	22.06	21.07	20.08	18.09	18.10	16.11	16.12	-
9	14.01	13.02	14.03	13.04	12.05	11.06	10.07	9.08	7.09	7.10	5.11	5.12	-
10	3.01	2.02	3.03	2.04	1.05	31.05	29.06	29.07	27.08	26.09	25.10	24.11	23.12
11	22.01	21.02	22.03	21.04	20.05	19.06	18.07	17.08	15.09	15.10	13.11	13.12	-
12	11.01	10.02	11.03	10.04	9.05	8.06	7.07	6.08	4.09	4.10	2.11	2.12	-
13	31.12	30.01	28.02	30.03	28.04	28.05	26.06	26.07	24.08	23.09	22.10	21.11	20.12
14	19.01	18.02	19.03	18.04	17.05	16.06	15.07	14.08	12.09	12.10	10.11	10.12	-
15	8.01	7.02	8.03	7.04	6.05	5.06	4.07	3.08	1.09	1.10	30.10	29.11	-
16	28.12	27.01	25.02	27.03	25.04	25.05	23.06	23.07	21.08	20.09	19.10	18.11	17.12
17	16.01	15.02	16.03	15.04	14.05	13.06	12.07	11.08	9.09	9.10	7.11	7.12	-
18	5.01	4.02	5.03	4.04	3.05	2.06	1.07	31.07	29.08	28.09	27.10	26.11	25.12

Таблица 1. Распределение новолуний юлианского календаря.

Дойдя до последнего года этой таблицы в соответствии с последним правилом мы должны будем к 25 декабря прибавить не 30, а 29, чтобы получить первое новолуние следующего лунного года. Но оно приходится на  $25+29=54$  декабря = 23 января, дату, являющуюся первым новолунием года, имеющего в первом столбце номер 0. Это значит, что в дальнейшем все вычисления будут повторяться, так что распределение новолуний по датам календарного года зависит только от остатка, который имеет номер года от Р.Х. при делении на 19. Таким образом, можно считать, что таблица 1 действительна для любого календарного года, а в столбце с буквой О стоят остатки от деления номера года от Р.Х. на 19. Это нарушение регулярности в распределении новолуний, обеспечивающее замыкание девятнадцатилетнего цикла и происходящее один раз в 19 лет, называется "скачком Луны".

Отметим одно важное обстоятельство, учтенное при составлении этой таблицы, но не заметное на первый взгляд. Рассмотрим строку таблицы, соответствующую году с номером 16 и начинающуюся с 28 декабря. Второе новолуние этого лунного года приходится на 27.01. А вот третье новолуние должно выпасть не на 25.02, как указано в таблице, а на 26.02. Ведь продолжительность второго лунного месяца должна быть равной 30 дням.

Подобное несоответствие с февральскими новолуниями будет в каждом високосном лунном году, начинающемся в декабре. Для того, чтобы исправить ситуацию день второго лунного месяца, следующий за днем 24 февраля не именуется, а следующий за ним день получает название 25 февраля. Другими словами, в високосном году юлианского календаря лишний день вставляется между 24 и 25 февраля и никак не нумеруется. В результате даты всех февральских дней, следующих за вставленным днем, уменьшаются на единицу по сравнению со сплошной нумерацией, и соответствие с таблицей восстанавливается. Календарное правило вставлять лишний день между 24 и 25 февраля и не датировать его, конечно, совершенно отличается от соответствующего правила в принятом у нас гражданском григорианском календаре, где лишний день вставляется после 28 февраля и носит имя 29 февраля. Сказанное никак не затрагивает даты новолуний високосных годов, начинающихся в январе. Их начала выпадают не позже 25 января, а значит февральские новолуния приходятся не позже 24 февраля.

Известно, что 29 августа 284 г. (начало эры Диоклетиана) было днем новолуния и, значит, первое новолуние 285 года пришлось на 23 января. Учитывая, что  $285 = 19 \cdot 15$ , получаем, что первое новолуние календарного года, предшествующего 1 году по Р.Х. также пришлось на 23 января. Это мотивирует выбор начала отсчета в п. 1 определения последовательности новолуний.

В продолжении строки заголовков, следующем за буквой О, указаны числа дней до следующего новолуния, т.е. новолуния, указанного в следующем столбце. В заголовке третьего столбца стоят числа 29/30, означающие, что для получения следующего новолуния нужно согласно правилу 3 прибавлять 30 или 29 в соответствии с тем, делится ли на 4 номер года, т.е. будет этот год високосным или нет. Дата следующего новолуния при этом будет одной и той же, ведь в високосном году календарный месяц февраль содержит 29 дней, а в обычном – 28 дней. Точно так же в заголовке последнего столбца таблицы записано 29/30. В соответствии с последним правилом в году с номером 18 к последнему новолунию нужно будет прибавлять 29, а в остальных лунных годах по 30 дней.

Из таблицы 1 следует, что в метоновом цикле из 19 лет новолуния могут выпадать только на 235 из 365 дней обычного календарного года. Так, например, ни одно из январских чисел 2, 4, 7, 10, 13, 15, 18, 21, 24, 26, 29 никогда не является календарным новолунием. В реальности так, конечно, не бывает. Подобное явление происходит и с другими календарными месяцами – примерно треть их дней не бывают новолуниями. Заметим, впрочем, что никакие два таких дня не стоят в календаре подряд.

Лунные годы юлианского календаря могут состоять из 354, 355, 383, 384 и 385 дней. Например, 2008 лунный год состоит из 385 дней, а 2013 — из 383 дней. Это легко можно определить с помощью таблицы 1.

Длина астрономического лунного месяца равна  $\beta = 29,530588\dots$  дней, поэтому в календаре лунные месяцы продолжительностью в 29 и 30 дней чередуются, см. правило 2. Их средняя величина равна 29,5 дней, что минимизирует отклонения лунных месяцев календаря от астрономических лунных месяцев. Примерно за 308 лет монотонная часть отклонения начал лунных годов от соответствующих астрономических новолуний достигнет величины в 1 сутки.

**Юлианская пасхалия.** Количество дней, прошедших начиная с первого январского новолуния до 31 января, т.е. возраст луны на 31 января года с номером  $n$  обозначим символом  $e(n)$ . Например, если новолуние выпадает на 1 января года с номером  $n$ , то  $e(n) = 30$ , если же новолуние приходится на 30 января, то  $e(n) = 1$ . Таким образом,  $e(n)$  есть целое число, лежащее в пределах от 1 до 30, а  $31 - e(n)$  есть январская дата, на



которую приходится первое январское новолуние  $n$ -го календарного года.

Первые 19 членов последовательности  $e(n)$  можно найти из приведенной выше таблицы:

$$8, 19, 30, 11, 22, 3, 14, 25, 6, 17, 28, 9, 20, 1, 12, 23, 4, 15, 26.$$

Далее эти числа повторяются, образуя периодическую последовательность с периодом 19. Не трудно проверить, что

$$e(n) \equiv e(n-1) + 11 + \delta_{19}(n) \pmod{30}.$$

Отсюда следуют формулы, позволяющие вычислять  $e(n)$  по номеру календарного года

$$e(n) \equiv 8 + 11n + \left[ \frac{n}{19} \right] \pmod{30}, \quad 1 \leq e(n) \leq 30.$$

Опуская дальнейшие обоснования, укажем здесь следующее правило.

*Чтобы вычислить день Пасхи в календарном году с номером  $n$  нужно с помощью условий*

$$V \equiv 6 + 19n - \left[ \frac{n}{19} \right] \pmod{30}, \quad 21 \leq V \leq 50,$$

*определить мартовскую дату пасхального полнолуния  $V$ , затем вычислить день недели  $d$  пасхального полнолуния*

$$d \equiv n + \left[ \frac{n}{4} \right] + V \pmod{7}, \quad 0 \leq d \leq 6,$$

*(воскресенью соответствует число 0, понедельнику — 1, вторнику — 2, среде — 3, четвергу — 4, пятнице — 5 и субботе — 6). Пасха придется на мартовский день с номером*

$$P = V + 7 - d.$$

При этом, конечно, нужно иметь в виду правило пересчета мартовских чисел в апрельские, если  $P > 31$ .

**Пример:**  $n = 2009$ .

Пасхальное полнолуние:  $V = 32$  марта = 1 апреля.

День недели пасхального полнолуния:  $d = 2$  — вторник.

Пасха приходится на  $32+7-2 = 37$  марта = 6 апреля по юлианскому календарю.

**Замечания:**

- Длины календарных годов повторяются с периодом 4 года, даты январских новолуний повторяются каждые 19 лет, день недели, на который приходится начало календарного года повторяется с периодом 28 лет. Равенства  $532 = 4 \cdot 133 = 19 \cdot 28$  показывают, что каждые 532 года будет происходить повторение длин календарных годов, дат январских новолуний и дней недели, на которые приходятся начала календарных годов. Период календаря равен 532 годам. В частности, если номера годов отличаются на  $19 \cdot 28 = 532$ , то Пасха в эти годы приходится на одно и то же число.
- Равенство  $V = 50$  невозможно. Поэтому  $22 \leq P \leq 56$ , т.е. Пасха празднуется от 22 марта до 25 апреля.

## 4 Григорианский календарь.

В основе календаря лежат следующие диофантовы приближения

$$\alpha - \frac{2081882250}{5700000} = \alpha - \left( 365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{400} \right) = -0,000302\dots, \quad \beta - \frac{2081882250}{70499183} = 0,000001\dots$$

Его 5700000 календарных, равно как и лунных, лет содержат по 2081882250 дней. Число 70499183, обеспечивающее достаточно хорошее согласование начал лунных годов с астрономическими новолуниями, примерно равно количеству астрономических новолуний, происходящих в течение 5700000 лет. Оно отлично от количества григорианских календарных новолуний на этом периоде, которое существенно больше и равно 70570000.

Новый календарь на смену юлианскому был введен в католических странах в 1582 году указом папы Григория XIII с целью привести календарную дату весеннего равноденствия, 21 марта, в соответствие с астрономическим равноденствием и изменить календарные правила так, чтобы в будущем по возможности уменьшить отклонения весеннего равноденствия и мартовских новолуний от астрономических. В частности, при этом были опущены 10 календарных дней, накопившихся вследствие того, что юлианский календарный год чуть длиннее астрономического, и после четверга 4 октября 1582г. по юлианскому календарю последовала пятница 15 октября 1582г. по григорианскому календарю.

Основными авторами календарной реформы принято считать Л. Лилио, предложившего заменить метонов цикл циклом эпакт, см. ниже, и К. Клавия, опубликовавшего в 1603г. подробное описание нового календаря с учетом изменений, внесенных в него комиссией по реформе

Длительность года в григорианском календаре задается равенством

$$f(n) = 365 + \delta_4(n) - \delta_{100}(n) + \delta_{400}(n),$$

т.е. високосными считаются годы, номера которых делятся на 4, за исключением годов столетий, номера которых не делятся на 400.

Отклонение начал календарных годов от астрономических равно

$$n\alpha - \sum_{k=1}^n f(k) = -0,000302\dots n + \left\{ \frac{n}{4} \right\} - \left\{ \frac{n}{100} \right\} + \left\{ \frac{n}{400} \right\}$$

Моноотонная часть отклонения достигает 1 суток примерно за 3300 лет.

**Эпакта** — символ, обозначающий распределение новолуний в текущем году григорианского календаря. Новолуния могут распределяться лишь одним из 32 способов (в юлианском календаре их 19, см. табл. 1). Эти способы обозначаются символами

$$I, II, III, \dots, XXIX, XXX, 19, 25.$$

Здесь присутствуют латинские обозначения первых 30 натуральных чисел и арабские обозначения натуральных чисел 19, 25. Обозначение XXX иногда заменяется нулем или символом \*. Эпакта календарного года однозначно указывает распределение новолуний в этом году. Например, если эпакта года равна XXV, новолуния приходятся на числа

$$6.01, 5.02, 6.03, 5.04, 4.05, 3.06, 2.07, 30.08, 29.09, 28.10, 27.11, 26.12.$$

Если же календарный год имеет эпакту 25, то новолуния выпадают на

6.01, 4.02, 6.03, 4.04, 4.05, 2.06, 2.07, 30.08, 28.09, 28.10, 26.11, 26.12.

Все новолуния для каждой из 32 эпакт можно свести в одну таблицу, см. далее табл. 2. В ней дни года обозначены теми же символами, что и эпакты. Символ, стоящий на месте определенного дня показывает, в годы с какими эпаками новолуние приходится на этот день. Особо указано распределение новолуний для эпакта, обозначаемой 19. Эта эпакта случается крайне редко и число 19 стоит лишь в клетке, соответствующей 31 декабря. Остальные новолуния такого календарного года совпадают с днями, обозначенными в таблице 2 символом XIX.

Если не обращать внимания на эпакты 19 и 25, можно заметить, что таблица 2 составлена следующим способом. В столбце, обозначенном Янв. начиная с символов XXX, XXIX в убывающем порядке поставлены все римские обозначения целых чисел до I. Затем эта последовательность повторяется 12 раз. Последовательность с номером 13 неполная. В получившемся распределении чисел по дням календарного года расстояния между одинаковыми знаками равны 30 дней. Затем, получившиеся отрезки с четными номерами укорачиваются на один день, за счет того, что эпакты XXIV и XXV сдваиваются. В результате расстояния в днях между соседними новолуниями годов с эпаками, обозначенными римскими числами, чередуются по 30 и 29 дней. Распределения новолуний, соответствующие эпакам 25 и 19 введены для исправления некоторых нежелательных эффектов, об этом речь пойдет ниже.

**Январские новолуния.** Обозначим, как и при описании юлианского календаря, символом  $e(n)$  возраст луны на 31 января, т.е. количество дней прошедших от первого январского новолуния до 31 января  $n$ -го года. Напомним, что функция  $e(n)$  принимает целые значения в пределах от 1 до 30.

В григорианском календаре для каждого года вычисляется по некоторым правилам январское новолуние, а затем определяется эпакта этого года, т.е. распределение остальных новолуний. Для вычисления первых январских новолуний, они приходятся на  $31 - e(n)$  января, принимается следующее определение

$$e(n) \equiv e(n - 1) + \Delta \pmod{30},$$

где целое число  $\Delta$  полагается равным 11, а затем корректируется в соответствии со следующими правилами

1. если номер текущего года  $n$  делится на 19, то к  $\Delta$  прибавляется 1,
2. если  $n$  делится на 100, но не делится на 400, т.е. текущий год является годом столетия, но не високосным, то из  $\Delta$  вычитается 1,
3. если при делении на 2500 номер  $n$  дает в остатке одно из восьми чисел

200, 500, 800, 1100, 1400, 1800, 2100, 2400,

то  $\Delta$  увеличивается на 1.

Например, при  $n = 15200$  имеем  $\Delta = 13$ .

Второе правило, "солнечное уравнение", связано с формулой вычисления продолжительности григорианского календарного года. Третье правило, "лунное уравнение", вызвано желанием сделать отклонения январских и, следовательно, мартовских календарных новолуний от соответствующих астрономических новолуний по возможности меньшими.

Дни	Янв.	Фев.	Мар.	Апр.	Май	Июн.	Июл.	Авг.	Сен.	Окт.	Ноя.	Дек.
1	xxx	xxix	xxx	xxix	xxviii	xxvii	xxvi	xxv xxiv	xxiii	xxii	xxi	xx
2	xxix	xxviii	xxix	xxviii	xxvii	25 xxvi	25 xxv	xxiii	xxii	xxi	xx	xix
3	xxviii	xxvii	xxviii	xxvii	xxvi	xxv xxiv	xxiv	xxii	xxi	xx	xix	xviii
4	xxvii	25 xxvi	xxvii	25 xxvi	25 xxv	xxiii	xxiii	xxi	xx	xix	xviii	xvii
5	xxvi	xxv xxiv	xxvi	xxv xxiv	xxiv	xxii	xxii	xx	xix	xviii	xvii	xvi
6	25 xxv	xxiii	25 xxv	xxiii	xxiii	xxi	xxi	xix	xviii	xvii	xvi	xv
7	xxiv	xxii	xxiv	xxii	xxii	xx	xx	xviii	xvii	xvi	xv	xiv
8	xxiii	xxi	xxiii	xxi	xxi	xix	xix	xvii	xvi	xv	xiv	xiii
9	xxii	xx	xxii	xx	xx	xviii	xviii	xvi	xv	xiv	xiii	xii
10	xxi	xix	xxi	xix	xix	xvii	xvii	xv	xiv	xiii	xii	xi
11	xx	xviii	xx	xviii	xviii	xvi	xvi	xiv	xiii	xii	xi	x
12	xix	xvii	xix	xvii	xvii	xv	xv	xiii	xii	xi	x	ix
13	xviii	xvi	xviii	xvi	xvi	xiv	xiv	xii	xi	x	ix	viii
14	xvii	xv	xvii	xv	xv	xiii	xiii	xi	x	ix	viii	vii
15	xvi	xiv	xvi	xiv	xiv	xii	xii	x	ix	viii	vii	vi
16	xv	xiii	xv	xiii	xiii	xi	xi	ix	viii	vii	vi	v
17	xiv	xii	xiv	xii	xii	x	x	viii	vii	vi	v	iv
18	xiii	xi	xiii	xi	xi	ix	ix	vii	vi	v	iv	iii
19	xii	x	xii	x	x	viii	viii	vi	v	iv	iii	ii
20	xi	ix	xi	ix	ix	vii	vii	v	iv	iii	ii	i
21	x	viii	x	viii	viii	vI	vi	iv	iii	ii	i	xxx
22	ix	vii	ix	vii	vii	v	v	iii	ii	i	xxx	xxix
23	viii	vi	viii	vi	vi	iv	iv	ii	i	xxx	xxix	xxviii
24	vii	v	vii	v	v	iii	iii	i	xxx	xxix	xxviii	xxvii
25	vi	iv	vi	iv	iv	ii	ii	xxx	xxix	xxviii	xxvii	xxvi
26	v	iii	v	iii	iii	i	i	xxix	xxviii	xxvii	25 xxvi	25 xxv
27	iv	ii	iv	ii	ii	xxx	xxx	xxviii	xxvii	xxvi	xxv xxiv	xxiv
28	iii	i	iii	i	i	xxix	xxix	xxvii	25 xxvi	25 xxv	xxiii	xxiii
29	ii		ii	xxx	xxx	xxviii	xxviii	xxvi	xxv xxiv	xxiv	xxii	xxii
30	i		i	xxix	xxix	xxvii	xxvii	25 xxv	xxiii	xxiii	xxi	xxi
31	xxx		xxx		xxviii		25 xxvi	xxiv		xxii		19 xx

Таблица 2. Распределение новолуний григорианского календаря.

Указанные выше правила означают, что

$$e(n) \equiv 8 + 11n + \left[ \frac{n}{19} \right] - \left[ \frac{n}{100} \right] + \left[ \frac{n}{400} \right] + \left[ \frac{8s + 13}{25} \right] \pmod{30}, \quad 1 \leq e(n) \leq 30,$$

где  $s = \left[ \frac{n}{100} \right]$ . Здесь учтено также, что в 1582 году возраст луны был принят равным 26. Эта формула определяет январские новолуния в григорианском календаре.

Заметим, что если  $\bar{\alpha}$  и  $\bar{\beta}$  — принятые в григорианском календаре рациональные приближения к  $\alpha$  и  $\beta$ , то  $\bar{\alpha}/\bar{\beta}$  — среднее количество лунных месяцев и

$$30 \left( \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} - 12 \right) - 11 = \frac{9183}{190000} = \frac{1}{19} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400} + \frac{8}{2500}$$

— среднее значение "скачков Луны", приходящиеся на один лунный год.

Наименьший период функции  $e(n)$  равен 5700000. Григорианский календарь использует очень точное приближение к длине синодического месяца. Благодаря этому вычисляемые календарем январские новолуния расположены достаточно близко к астрономическим новолуниям. По нашим расчетам отклонение монотонной составляющей первых январских новолуний от астрономических станет превышать одни сутки по прошествии примерно 40000 лет. Величина отклонения в начале этого периода в основном определяется периодической частью, отклонение которой в одну и в другую сторону относительно истинных новолуний не превосходит 2,5 суток.

**Вычисление эпакты года.** Эпакты тесно связаны с возрастом луны на 31 января и определяются тремя правилами.

1. Если  $e(n)$  не равно 19 или 25, то эпакта полагается равной записи  $e(n)$  в римской системе нумерации, т.е. одному из символов I, II, ..., XXX.

2. В случае  $e(n) = 25$  эпакта года зависит от остатка при делении  $n$  на 19, обозначим его буквой  $a$ ,  $0 \leq a < 19$ . Если  $a > 10$ , то эпакта календарного года с номером  $n$  есть 25, в случае же  $a \leq 10$  полагают эпакту равной XXV.

3. В случае  $e(n) = 19$  и  $n \equiv 18 \pmod{19}$ , эпакту календарного года с номером  $n$  полагают равной 19, в остальных же случаях с  $e(n) = 19$  она есть XIX.

Таким образом, возраст луны на 31 января  $e(n)$  определяет эпакту календарного года единственным образом лишь в случаях, если этот возраст отличен от 25 и 19. Значение  $e(n) = 25$  соответствует двум различным эпактам, обозначаемым 25 и XXV, а значение  $e(n) = 19$  — эпактам 19 и XIX.

#### **Аномалии.**

1. В пределах одного 19 летнего цикла возможны годы, имеющие одинаковое распределение новолуний. Так годы 1697 и 1708 имеют эпакту VII. Метонов цикл с 1691 по 1709 годы содержит 8 таких пар годов. Метонов цикл с 2185 по 2204 год содержит 4 таких пары.

2. Второе правило вычисления эпакт григорианского календаря приводит к совпадениям новолуний там, где их не должно было быть. Годы с номерами 13592 и 13600 лежат в одном метоновом цикле и имеют 6 совпадающих новолуний. Всего на периоде в 5700000 лет имеется 512 таких случаев.

3. Эпакта 2008 года равна XXII. Второй лунный месяц года с эпактной XXII состоит из 30 дней. Так как год високосный, то к этому месяцу должен быть добавлен один день. Возникает месяц длиной в 31 день.

Следующие далее аномалии обнаружил французский математик D.Roegel.

4. В случае  $e(n) = 19$ ,  $n \not\equiv 18 \pmod{19}$  и  $e(n+1) = 1$  последнее новолуние  $n$ -го года приходится на 2 декабря, а первое новолуние года с номером  $n+1$  — на 29 января, т.е.

возникает лунный месяц длиной в 59 дней. Имеется 144 случая, наименьший из них  $n = 16399$ , когда условие  $e(n) = 19, e(n + 1) = 1$  выполняется при эпакте XIX. Календарь теряет астрономическое новолуние.

5. Имеется 8 случаев, наименьший из них  $n = 106399$ , когда  $e(n) = 18$ , т.е. эпакта года равна XVIII, и  $e(n + 1) = 1$ , приводящие к лунным месяцам продолжительностью в 58 дней.

6. В 918 случаях, например для  $n = 4199$ , выполняются равенства  $e(n) = 20, e(n + 1) = 30$ . У года с номером  $n$  новолуние приходится на 31 декабря, а у года с номером  $n + 1$  — на 1 января. Возникает месяц продолжительностью в 1 день. По существу, григорианский календарь вставляет два календарных новолуния вместо одного астрономического.

**Григорианская пасхалия.** Принятое в католической церкви правило вычисления григорианской Пасхи совпадает с каноническим: Пасха празднуется в воскресенье, после первого полнолуния, следующего за весенним равноденствием или совпадающего с ним. Для вычисления дня григорианской Пасхи нужно внести необходимые изменения в формулы, вычисляющие пасхальное полнолуние и день недели 21 марта. Естественно, при этом считается, что возраст луны на 31 января  $e(n)$  вычисляется по указанной выше формуле григорианского календаря.

*Для того, чтобы вычислить день григорианской Пасхи по новому стилю в календарном году с номером  $n$  нужно сначала вычислить  $e(n)$  — возраст луны на 31 января, затем с помощью условий*

$$V \equiv \begin{cases} 49 & \text{если } e(n) = 24 \\ 48 & \text{если } e(n) = 25 \text{ и } n - 19 \cdot \left[ \frac{n}{19} \right] > 10, \\ 14 - e(n) \pmod{30} & \text{в остальных случаях} \end{cases} \quad 21 \leq V \leq 50.$$

*определить  $V$  — дату пасхального полнолуния и с помощью условий*

$$d \equiv 2 + n + \left[ \frac{n}{4} \right] - \left[ \frac{n}{100} \right] + \left[ \frac{n}{400} \right] + V \pmod{7}, \quad 0 \leq d \leq 6$$

*определить  $d$  — день недели пасхального полнолуния. Пасха приходится на мартовский день с номером*

$$P = V + 7 - d.$$

*При этом нужно иметь в виду правило пересчета мартовских чисел в апрельские, если  $P > 31$ .*

**Пример:**  $n = 2009$ .

Пасхальное полнолуние:  $V = 41$  марта = 10 апреля.

День недели пасхального полнолуния:  $d = 5$  — пятница.

Пасха приходится на  $41 + 7 - 5 = 43$  марта = 12 апреля по григорианскому календарю.

Григорианская Пасха всегда приходится на период с 22 марта по 25 апреля по григорианскому календарю.

Если обозначить  $P_{\text{ю}}(n)$  и  $P_{\text{г}}(n)$  даты Пасхи по юлианскому и григорианскому календарям в году с номером  $n$ , то православная Пасха случится на

$$P_{\text{ю}}(n) - P_{\text{г}}(n) + \left[ \frac{n}{100} \right] - \left[ \frac{n}{400} \right] - 2$$

дней позже, чем католическая. С помощью этой формулы и приведенных выше правил вычисления Пасхи по юлианскому и григорианскому календарям такое превышение легко

рассчитать для любого года. Например, в 2010 и 2011 годах православные и католики будут праздновать Пасху в один день. Слагаемое  $\left[\frac{n}{100}\right] - \left[\frac{n}{400}\right] - 2$  в последней формуле возрастает неограниченно, а каждое из чисел  $P_{\text{ю}}(n)$ ,  $P_{\text{г}}(n)$  принадлежит интервалу от 22 до 56. Поэтому, начиная с некоторого момента, православная Пасха всегда будет праздноваться после католической. Последний раз эти праздники совпадут в 2698 году.

## 5 Новоюлианский календарь.

В 1923г. в Константинополе состоялось совещание Православных церквей, постановившее реформировать юлианский календарь в соответствии с предложением сербского астронома М.Миланковича. Новый календарь, получивший название "новоюлианский", был принят рядом православных церквей. Постановление о введении его в Русской Православной церкви было принято в сентябре 1923г., но из-за возникшего сопротивления было вскоре отменено.

В основе календаря лежит приближение

$$\alpha - \frac{164359}{450} = \alpha - \left(365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{2}{900}\right) = -0,000024.$$

Монотонная составляющая отклонения календарных годов от астрономических достигает величины в одни сутки по прошествии примерно 40000 лет.

Високосными считаются годы, номера которых делятся на 4, за исключением годов столетий, которые считаются високосными лишь в случае, если число столетий при делении на 9 дает в остатке 2 или 6. Была ликвидирована также разница в числах между юлианским и григорианским календарями. Продолжительность года в новоюлианском календаре равна

$$f(n) = 365 + \delta_4(n) - \delta_{100}(n) + \delta_{900}(n + 300) + \delta_{900}(n + 700).$$

Пасхальное полнолуние в новоюлианском календаре должно определяться с помощью астрономических вычислений. Однако в большинстве случаев церкви, перешедшие на новоюлианский стиль, по-прежнему используют юлианскую пасхалию для определения подвижных праздников. Выше уже говорилось о возникающих сложностях совместного использования двух календарей. Если этот порядок сохранится и далее, Пасха, следуя за юлианским календарем, будет смещаться к лету, а затем и к осени, ведь весеннее равноденствие, вычисляемое по новоюлианскому календарю будет практически стоять на нынешнем месте. Юлианский календарь, смещаясь относительно новоюлианского, уводит свое весеннее равноденствие за собой и не нарушает каноническое правило, сколь бы долго это смещение ни происходило, но совместное использование новоюлианского календаря и александрийской пасхалии, конечно, приведет к нарушению норм. Скажем в 3237 году новоюлианская Пасха произойдет 27 апреля по новоюлианскому стилю, а последний раз Пасха попадет в интервал от 22 марта по 25 апреля в 7425 году.

Последовательность длин годов в календаре Миланковича имеет период 900 лет. Количество дней, составляющих эти годы 328718 не делится на 7. Значит, последовательность длин годов и дней недели на начало года имеет период  $7 \cdot 900 = 6300$  лет. Каким бы ни было распределение лунных месяцев, период новоюлианского календаря не может быть меньше 6300 лет. Например, если использовать для распределения новолуний принятый в юлианской пасхалии 19 летний метонов цикл, а именно это делается в настоящее

время церквями, перешедшими на новоюлианский стиль, период календаря будет равен  $19 \cdot 6300 = 119700$  лет.

**Проект новоюлианской пасхалии.** Построим, пользуясь юлианскими принципами, распределение лунных месяцев и годов для новоюлианского календаря, имея целью уменьшить его период и отклонения первых календарных новолуний от астрономических. Определим новолуния следующими правилами.

1. *Первое новолуние года, предшествовавшего 1 году после Р.Х., выпало на 23 января. Эта дата есть начало нулевого лунного года.*

Мы выбрали это начало с тем, чтобы обеспечить аналогию в формулах. Можно было бы выбрать и другую дату в пределах некоторого интервала возможных значений.

2. *Первое новолуние, выпадающее на 25 декабря или после этой даты, считается началом нового лунного года. Первый месяц каждого лунного года состоит из 30 дней. Далее продолжительности месяцев чередуются и составляют 29, 30, 29 и т.д. дней.*

Кроме того, нужно сделать две поправки.

3. *Если лунный год соответствует високосному году в новоюлианском календаре, то ко второму месяцу нужно прибавить один день.*

4. *Если номер лунного года, увеличенный на 1, делится на 21, то из одиннадцатого месяца лунного года нужно отнять один день.*

Эти правила определяют бесконечную последовательность лунных месяцев продолжительностью в 29 и 30 дней.

Согласно последнему правилу "скачок Луны" происходит не каждый девятнадцатый, как в юлианском календаре, но каждый двадцать первый год, благодаря чему обеспечивается лучшее согласование лунных месяцев с годами новоюлианского календаря и уменьшается период календаря. Лишний день вычитается не из последнего месяца, а из одиннадцатого. Это связано с тем, что в юлианском календаре последний месяц лунного года с золотым числом 19 всегда имеет 30 дней. В описываемом календаре уменьшаемый лунный год иногда может состоять из 12 месяцев и вычитание из последнего месяца привело бы к нежелательному появлению месяцев длиной в 28 дней.

В основе предлагаемого распределения новолуний лежат следующие рациональные приближения к длительностям тропического года и синодического месяца

$$\bar{\alpha} = \frac{1150513}{3150} = \frac{164359}{450} = 365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{2}{900}, \quad \bar{\beta} = \frac{1150513}{38960}.$$

Для них имеем

$$\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} = \frac{38960}{3150} = 12 + \frac{116}{315}, \quad 30 \left( \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} - 12 \right) - 11 = \frac{1}{21}.$$

В соответствии с этими равенствами лунный год с номером  $n$  состоит из

$$12 + \left[ \frac{116(n+1)}{315} \right] - \left[ \frac{116n}{315} \right] \quad (1)$$

лунных месяцев, а возраст луны на 31 января  $n$ -го года, который мы, как и ранее, обозначаем  $e(n)$ , в рассматриваемом календаре вычисляется по формуле

$$e(n) \equiv 8 + 11n + \left[ \frac{n}{21} \right] \pmod{30}, \quad 1 \leq e(n) \leq 30.$$



Последнюю формулу можно переписать и в ином виде

$$e(n) \equiv e(n-1) + 11 + \delta_{21}(n) \pmod{30}, \quad 1 \leq e(n) \leq 30.$$

Функция  $e(n)$  имеет период 315, так что через каждые 315 лет первые январские новолуния, а значит, и начала лунных годов будут приходиться на одинаковые даты. Таким образом, таблица, аналогичная таблице 1, будет содержать 315 строк и "скачок Луны" будет происходить в ней каждые 21 год, т.е. 15 раз. Метонов цикл заменяется здесь циклом из 315 лет, состоящих из 3896 месяцев.

Учитывая, что наименьшее общее кратное чисел 900, 315 и 7 равно 6300, т.е.  $6300 = 7 \cdot 900 = 20 \cdot 315$ , заключаем, что по прошествии 6300 лет начала календарных и лунных годов, а также их дни недели начнут повторяться. Все соответствующие новолуния календарных годов с номерами  $n$  и  $n + 6300$  приходятся на одни и те же календарные даты. Таким образом, рассматриваемый календарь имеет период 6300 лет вместо 532 летнего периода юлианского календаря.

В силу равенства  $\beta - 1150513/38960 = -0,000033\dots$  монотонная часть отклонения начал лунных годов от соответствующих астрономических новолуний по абсолютной величине меньше, чем  $0,00042n$  и достигает величины в 1 сутки примерно за 2400 лет. Отклонение периодической части на периоде в 6300 лет не превосходит 2 суток.

Принятое в новоюлианском календаре распределение високосных годов ведет к формуле для дня недели 21 марта

$$d(n) \equiv 2 + n + \left[ \frac{n}{4} \right] - \left[ \frac{n}{100} \right] + \left[ \frac{n+300}{900} \right] + \left[ \frac{n+700}{900} \right] \pmod{7}, \quad 0 \leq d(n) \leq 6,$$

и пасхальное воскресенье находится обычным способом.

Чтобы вычислить день Пасхи в календарном году с номером  $n$  нужно с помощью условий

$$V \equiv 6 + 19n - \left[ \frac{n}{21} \right] \pmod{30}, \quad 21 \leq V \leq 50,$$

определить мартовскую дату пасхального полнолуния  $V$ , затем вычислить день недели  $d$  пасхального полнолуния

$$d \equiv 2 + n + \left[ \frac{n}{4} \right] - \left[ \frac{n}{100} \right] + \left[ \frac{n+300}{900} \right] + \left[ \frac{n+700}{900} \right] + V \pmod{7}, \quad 0 \leq d \leq 6.$$

Пасха придется на мартовский день с номером

$$P = V + 7 - d.$$

При этом, нужно иметь в виду правило пересчета мартовских чисел в апрельские, если  $P > 31$ .

В XXI веке даты празднования Пасхи по описываемому календарю 21 раз отличаются от рассчитанных по григорианскому календарю. Так в 2008 году григорианская Пасха пришлась на 23 марта, а рассчитанная по описываемому календарю — на 30 марта по григорианскому стилю. В ближайшее время это произойдет в 2012, 2015, 2018, 2019 годах.

Пасха, вычисленная по формулам этого календаря, приходится на период с 22 марта по 26 апреля.

## 6 Заключение.

Уменьшение отклонений солнечного и лунного связано с выбором более точных рациональных приближений к средним продолжительностям тропического года и синодического месяца, определяемых астрономической наукой. Как правило, уточнение приближений приводит к усложнению календаря. Эти рациональные приближения задают среднюю величину календарных годов и календарных лунных месяцев и, следовательно, величину монотонной части отклонения календаря от астрономических реальностей за год. Именно точностью рациональных приближений определяется временной интервал, в течение которого, календарь отклоняется от астрономических величин на одни сутки. Далее построение календаря сводится к выбору распределения календарных годов, а также и календарных лунных месяцев. При этом длительности годов можно выбирать, как в юлианском календаре, равными 365 или 366 лет, а длительности месяцев в 29 или 30 дней. Конечно, можно выбирать и другие продолжительности, например в 28 дней для длительности месяцев, однако, при этом следует избегать "экзотических" лунных месяцев, содержащих, например, 1 или 59 дней, как это бывает в григорианском календаре. Какие же условия следует обеспечить таким выбором? К чему следует стремиться? Перечислим, важные с нашей точки зрения, критерии.

- По возможности меньшее отклонение дней весеннего равноденствия от соответствующих астрономических равноденствий. По возможности меньшее отклонение мартовских календарных новолуний от соответствующих астрономических новолуний.
- Обозримость календаря, т.е. наличие не очень сложных правил (таблиц или формул) для вычисления начал нового календарного года и очередного мартовского новолуния, а также дня недели, на который выпадает весеннее равноденствие. С этим же связана периодичность календаря. Следует стремиться к тому, чтобы период календаря, т.е. временной интервал, через который одновременно начинают повторяться дни недели начал календарных годов, дни недели первых мартовских новолуний, продолжительности календарных годов и лунных месяцев, был бы по возможности минимальным. Дата празднования Пасхи повторяется с этим же периодом.
- Как известно, распределение церковных праздников в году однозначно определяется календарной датой, на которую выпадает праздник Пасхи. В обоих календарях юлианском и григорианском дата празднования Пасхи меняется в интервале от 22 марта до 25 апреля. Увеличение этого интервала на один день приводит к возможному смещению подвижных праздников относительно неподвижных на один день. Так, например, изменение интервала празднования Пасхи до промежутка от 22 марта до 26 апреля может привести к уменьшению Петрова поста, но не более, чем на один день.
- Календарные новолуния между двумя последовательными мартовскими новолуниями должны по возможности не сильно отклоняться от астрономических новолуний.

Вопрос об изменении юлианского календаря есть вопрос церковной политики, и решать его должно с учетом многих факторов.

Юлианский календарь уже сейчас потерял свою роль, как связанное с Солнцем и Лунной средство измерения времени, и является способом распределения православных праздников. Церковное весеннее равноденствие смещается к лету и, уводит в этом направлении все праздники. Прецедент известен, Древний Египет жил несколько тысячелетий по 365 дневному солнечному календарю, в котором начало года смещалось на одни сутки по прошествии каждых четырех лет. Пройдя в течение 1461 года через лето, весну, зиму и осень,

начало года возвращалось к исходному положению. Точно так же, если не трогать юлианский календарь, и все церковные праздники вместе с Пасхой совершат непрерывный переход сквозь времена года и по прошествии примерно 45000 лет вернуться к состоянию на момент Никейского Собора. Движение это будет происходить медленно, для каждого поколения практически незаметно, изменения будут происходить один раз в сто лет, и не затронут взаимное расположение праздников. Ощутимым будет лишь сдвиг неподвижных праздников (ближайший раз в 2100 году).

С математической точки зрения количество альтернатив юлианскому календарю невелико. Ведь они связаны с хорошими рациональными приближениям к средним величинам тропического года и синодического месяца. Слово "хорошими" означает здесь не только достаточную малость отклонений, но и арифметические свойства числителей и знаменателей приближений, именно от них зависит величина периода календаря и простота формул вычисления пасхалии.

Новоюлианское распределение годов с новой пасхалией, основанной на принципах юлианского календаря, кажутся мне предпочтительными среди иных вариантов. Нужно иметь в виду, что до 2800 года продолжительности новоюлианского и григорианского календарных годов совпадают, и лишь впоследствии проявится то, что длина новоюлианского календарного года чуть короче. Значит, в период до 2800 года календари будут отличаться только датами празднования Пасхи и других подвижных праздников. Изменение юлианского календаря сведется к изменению правил пасхалии и сдвигу неподвижных праздников на соответствующие даты действующего новоюлианского календаря.

Как бы то ни было, затронутые в докладе проблемы требуют дальнейших исследований и обсуждения астрономами и математиками, историками церкви и специалистами в области церковной практики, обсуждения специалистами, руководствующимися в своих действиях на этом пути интересами и благом церкви.